Clase 13: Continuación.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

1. Teoría L^2 de las series de Fourier.

Una idea importante en la discusión de PAA es la consideración de espacios vectoriales de funciones sobre un intervalo y la introducción de un producto interno entre las funciones, incorporando de esta manera aspectos del algebra lineal como autovectores, autovalores y ortogonalidad entre otros. Por ejemplo el PAA

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0; \quad 0 \leq x \leq l, \tag{1}$$

$$u(0) = 0 \;\; u(l) = 0 \tag{2}$$

es un problema de algebra lineal en el sentido siguiente. Sea el ODLCC $L = -d^2/dx^2$ definido sobre el espacio D_L de todas las $u \in C^2([0;l])$ tales que $u(0) = 0$, $u(l) = 0$. Dejamos al estudiante verificar (ejercicio simple pero recomendado) que D_L es un espacio vectorial de funciones sobre $[0;l]$ (subespacio lineal de $C^2(0;l)$), y que

$$L : D_L \longrightarrow C([0,1])$$

es aplicación lineal. Todo el problema (1), (2) se reduce ahora en la ecuación

$$Lu = \lambda u; \quad u \in D_L, \tag{3}$$

una ecuación de autovalores y autofunciones como entendido en el algebra lineal.

Empezamos ahora el desarrollo abstracto. Sea $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $L^2(a;b)$ el espacio de todas las funciones complejas $f(x)$ definidas *c.s.* en (a,b) y tal que existe

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \;\; (f \in L^2(a;b)). \tag{4}$$

Recordemos que identificamos funciones $f(x)$, $g(x)$ en $(a;b)$ tal que $f(x) = g(x)$ *c.s.* en $(a;b)$. Demostraremos ahora que $L^2(a;b)$ es un espacio vectorial. Utilizamos la desigualdad

$$|\alpha+\beta|^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Tenemos $0 \leq (|\alpha| - |\beta|)^2 = |\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$

$$\implies \quad 2|\alpha\beta| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 \tag{6}$$

luego $|\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha\beta| \overset{(6)}{\leq} 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$, lo que demuestra (5). Ahora tenemos para $f, g \in L^2(a;b)$,,

$$|f(x)+g(x)|^2 \overset{(5)}{\leq} 2(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$$

y existen

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx, \quad \int_a^b |g(x)|^2 dx,$$

lo que implica la existencia de $\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx$, es decir $f+g \in L^2(a;b)$. Como además es claro que $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in L^2(a;b) \implies \lambda f \in L^2(a;b)$, vemos que $L^2(a,b)$ es un espacio vectorial. De (6) tenemos también que

$$f, g \in L^2(a;b) \quad \implies \quad fg \in L^1(a;b). \tag{7}$$

Tomando para $(a;b)$ un intervalo <u>acotado</u> y $g(x) = 1$ en $(a;b)$, (7) implica que

$$L^2(a;b) \subset L^1(a;b) \;\text{ si }\; (a;b) \quad \text{acotado.} \tag{8}$$

Pero si $f(x) = 1/\sqrt{x}$ en $(0;1)$, entonces $f \in L^1(0;1)$ pero $f \notin L^2(0;1)$ ya que $|f(x)|^2 = 1/x^2$ y $\int_0^1 1/x^2 dx$ no existe. Observe que $C([a;b]) \subset L^2(a;b)$.

Ejemplo 1. *(a) Sea* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *en* $1 \leq x < \infty$, *entonces*

$$\int_1^\infty |f(x)|^2 dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\left[\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1 \quad \implies \quad f \in L^2(1;\infty)$$

(b) Sea $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ *en* $0 < x < \infty$. *Entonces* $f \in L^1(0;\infty)$ *(¡Verifique!) pero* $f \notin L^2$ *(¡Verifique!).*

En $L^2(a;b)$ definimos ahora un producto interno $(\ ,\ )$ por

$$(f,g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx; \quad f,g \in L^2(a;b). \tag{9}$$

La integral existe ya que $\int_a^b |f(x)\overline{g(x)}|dx = \int_a^b |f(x)g(x)|dx$ existe porque $fg \in L^1(a;b)$ según (7). Dejamos al lector como ejercicio fácil (pero recomendado) verificar las propiedades siguientes

$$\begin{aligned}\overline{(f,g)} &= (g,f)\\ (\alpha f,g) &= \alpha(f,g)\\ (f,\alpha g) &= \overline{\alpha}(f,g)\\ (f+g,h) &= (f,g)+(g,h)\\ (f,g+h) &= (f,g)+(f,h)\end{aligned} \tag{10}$$

para $f,g,h \in L^2(a;b)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Además es claro que

$$\begin{gathered}(f,f) = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0, \quad f \in L^2(a;b),\\ (f,f)=0 \iff f(x)=0 \ \ c.s. \text{ en } (a;b).\end{gathered} \tag{11}$$

El producto interno $(\ ,\ )$ induce en $L^2(a;b)$ una norma $\|\ \ \|$, definido por

$$\|f\| := \sqrt{(f,f)}, \quad f \in L^2(a;b) \tag{12}$$

(como $(f,f) \geq 0$ según (11), $\sqrt{(f,f)}$ es un número real y ≥ 0 para todo $f \in L^2(a;b)$), y también el concepto de ortogonalidad:

$$f \perp g \ \ (f,g \text{ son ortogonales}) \ \ \overset{def.}{\iff} \ \ (f,g)=0 \ \ (f,g \in L^2(a;b)) \tag{13}$$

o con más detalle

$$f \perp g \iff \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = 0, \quad (f,g \in L^2(a;b)). \tag{14}$$

Este es el concepto de ortogonalidad que ya introducimos anteriormente (Clase 11). Una Observación sobre la terminología: las reglas (10) son las mismas reglas que son válidas para el producto interior $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$ para vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^n$ dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ tales que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ se llaman ortogonales, y $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ se llama la norma de $\vec{a}$ (longitud de la flecha $\vec{a}$).

Como para vectores en $\mathbb{R}^n$ tenemos la siguiente versión del teorema de Pitágoras:

$$f \perp g \implies \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad (f, g \in L^2(a;b)), \tag{15}$$

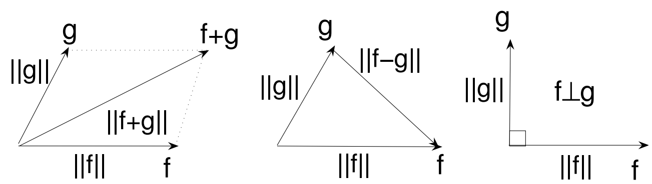
porque

$$\begin{aligned}(f,g) = 0 \implies \|f+g\|^2 &\overset{(12)}{=} (f+g, f+g) \overset{(10)}{=} (f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g) \\ &\overset{(12)}{=} (f,f) + (g,g) = \|f\|^2 + \|g\|^2.\end{aligned}$$

Más generalmente (¡verifique!):

$$\begin{aligned}&\{f_1, \cdots, f_n\} \text{ sistema ortogonal en } L^2(a;b) \text{ (es decir } f_i \perp f_j \text{ si } i \neq j) \\ &\implies \|f_1 + \cdots + f_n\|^2 = \|f_1\| + \cdots + \|f_n\|, \quad o \quad \left\|\sum_{i=1}^n f_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2.\end{aligned} \tag{16}$$

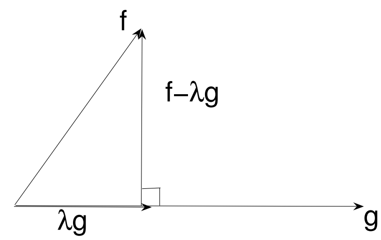
Hemos introducido para el espacio $L^2(a;b)$ varios conceptos ya conocidos del cálculo vectorial en $\mathbb{R}^n$. Es entonces natural asociar con una $f \in L^2(a;b)$ la imagen de una flecha con longitud $\|f\|$, como en las figuras siguientes



La norma $\| \ \|$ tiene las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned}\|f\| \geq 0 \text{ y } \|f\| = 0 &\iff f = 0 \text{ (es decir } f(x) = 0 \text{ } c.s. \text{ en } (a;b)), \\ \|\lambda f\| &= |\lambda| \|f\| \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \quad f \in L^2(a;b)), \\ \|f+g\| &\leq \|f\| + \|g\| \quad \text{(desigualdad triangular)}, \\ |(f,g)| &\leq \|f\| \|g\| \quad \text{(desigualdad de Schwarz)}.\end{aligned} \tag{17}$$

Las primeras tres propiedades son evidentes. Demostraremos ahora la desigualdad de Schwarz. Sean $f, g \in L^2(a;b)$, $g \neq 0$ (la desigualdad es trivial si $g = 0$, siendo $(f, 0) = 0$, $f \in L^2(a;b)$), y calculemos la proyección ortogonal de f sobre g, como indicamos en la figura siguiente:



$$\lambda g = \text{proyección ortogonal de } f \text{ sobre } g.$$

Tenemos $(f - \lambda g) \perp g \overset{(13)}{\Longrightarrow} (f - \lambda g, g) = 0 \Longrightarrow (f, g) - \lambda(g, g) = 0$

$$\Longrightarrow \quad \lambda = \frac{(f,g)}{(g,g)} \overset{(12)}{=} \frac{(f,g)}{\|g\|^2}. \tag{18}$$

Ahora

$$f = (f - \lambda g) + \lambda g, \quad (f - \lambda g) \perp \lambda g \quad \overset{(15)}{\Longrightarrow} \quad \|f\|^2 = \|f - \lambda g\|^2 + \|\lambda g\|^2 \geq \|\lambda g\|^2$$

$$\Longrightarrow \quad \|f\| \geq \|\lambda g\| = |\lambda| \|g\| \overset{(18)}{=} \frac{|(f,g)|}{\|g\|},$$

lo que implica $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$. Demostraremos ahora la desigualdad triangular. Tenemos

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 \quad & \overset{(12)}{=} \quad (f+g, f+g) = |((f+g, f+g))| \overset{(10)}{=} |(f,f) + (f,g) + (g,f) + (g,g)| \\
& \overset{(10)}{=} \quad |(f,f) + (f,g) + \overline{(f,g)} + (g,g)| \overset{(12)}{\leq} \|f\|^2 + |(f,g) + \overline{(f,g)}| + \|g\|^2 \\
& = \quad \|f\|^2 + 2|Re((f,g))| + \|g^2\| \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|(f,g)| \\
& \overset{\text{Schwarz}}{\leq} \quad \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2 \\
& \Longrightarrow \quad \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|,
\end{aligned}$$

listo. La fórmula (18) dice que

$$\frac{(f,g)}{\|g\|^2} g = \frac{\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx}{\int_a^b |g(x)|^2 dx} g \tag{19}$$

es la proyección ortogonal de f sobre g y observamos que el cociente de integrales en (19) es similar a cociente de integrales que aparece en la fórmula general de coeficientes de Fourier en la fórmula (17) de la Clase 11:

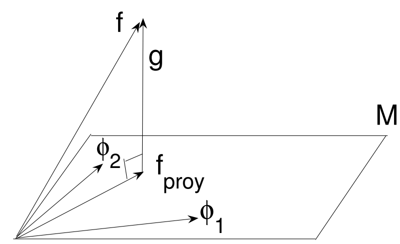
$$\lambda = \frac{(f,g)}{\|g\|^2}$$

podemos llamar el coeficiente de Fourier de f con respecto a g.

Consideremos ahora un sistema ortogonal (s.o.) $\{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$ ($\phi_i \neq 0$) en $L^2(a;b)$. Este sistema genera un subespacio lineal $M \subset L^2(a;b)$ que consiste de todas las combinaciones lineales de la forma

$$\phi = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n; \quad c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C} \ \ (\phi \in M). \tag{20}$$

Geométricamente, con la analogía de considerar $\phi_1, \cdots, \phi_N$ como N vectores en un espacio $\mathbb{R}^n$ $(n > N)$, M es el plano $N-$dimensional generado por los N vectores $\phi_1, \cdots, \phi_N$ (2 vectores ortogonales en $\mathbb{R}^3$ generan un plano en $\mathbb{R}^3$ que contienen a los dos vectores, etc.) Sea $f \in L^2(a;b)$. Nos proponemos a calcular la proyección ortogonal de f sobre el "hiperplano" M en $L^2(a;b)$ generado por $\phi_1, \cdots, \phi_N$. Geométricamente la situación es como en la figura siguiente (donde tenemos $N = 2$)



f_{proy} = proyección ortogonal de f sobre M.

Demostraremos que

$$f_{proy} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \phi_n. \tag{21}$$

Primero observamos que el miembro derecho de (21) es de la forma (20) con

$$c_n := \frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2}; \quad n = 1, \cdots, N \tag{22}$$

(c_n es el coeficiente de Fourier de f con respecto a ϕ_n), de modo que pertenece a M. Entonces basta demostrar que

$$f - \sum_{n=1}^{N} \frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n\|^2 \phi_n} := g \perp M, \tag{23}$$

lo que es equivalente con $g \perp \phi_i$ para $i = 1, \cdots, N$. Sea ϕ_m un elemento arbitrario fijo del $s.o.$, entonces

$$\begin{aligned} (g,\phi_m) &\overset{(10)(23)}{=} (f,\phi_m) - \sum_{n=1}^{N} \frac{f,\phi_n}{(\phi_n,\phi_n)}(\phi_n,\phi_m) = ((\phi_m,\phi_n) = 0 \text{ si } m \neq n) \\ &= (f,\phi_m) - \frac{(f,\phi_m)}{(\phi_m,\phi_m)}(\phi_m,\phi_m) = (f,\phi_m) - (f,\phi_m) = 0, \end{aligned}$$

y comprobamos que $g \perp \phi_m$ (hemos utilizado el mismo razonamiento que nos llevó a la formula (17) de la Clase 11). Como ϕ_m era arbitrario, concluimos que $g \perp \phi_i$, $i = 1, \cdots, N$, es decir, $g \perp M$. Esto concluye la demostración de (21).

Los

$$c_n \overset{(22)}{=} \frac{\int\limits_a^b f(x)\overline{\phi_n(x)}dx}{\int\limits_a^b |\phi_n(x)|^2 dx},$$

se llaman <u>los coeficientes de Fourier de f con respecto al $s.o.$ $\{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$</u>.